جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات

مرحله دوم

پنجمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۳

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
–	۸	۵۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۸ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۵۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- می‌خواهیم با استفاده از $\frac{n^۲-(n-۲)^۳}{۲}$ عدد آجر ۲×۱×۱ شکل پوسته‌ی خارجی یک مکعب $n\times n\times n$ را بسازیم. (منظور از پوسته‌ی خارجی مکعب $n\times n\times n$، یک مکعب $n\times n\times n$ است که یک مکعب $(n-۲)\times(n-۲)\times(n-۲)$ از وسط آن برداشته شده است.) ثابت کنید که این کار تنها وقتی امکان‌پذیر است که n عددی زوج باشد. (**۸ نمره**)

۲- فرض کنید یک ماشین در اختیار داریم که می‌تواند این سه کار را بر روی کارت‌هایی که بر روی هر یک از آنها یک کلمه نوشته شده است انجام دهد:

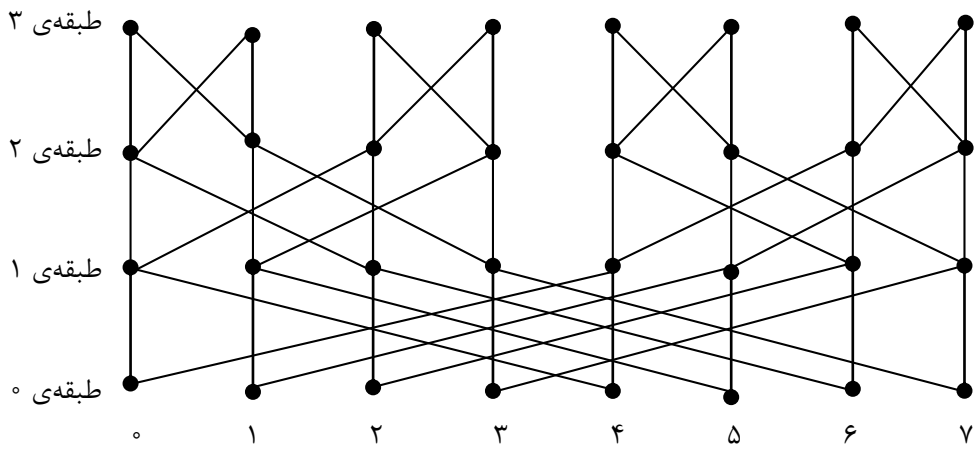
- دو کارت که بر روی آنها دو کلمه نوشته شده است را بگیرد و یک کارت تولید کند که بر روی آن این دو کلمه پشت سر هم نوشته شده‌اند. (برای مثال اگر بر روی کارت اول رشته‌ی aab و بر روی کارت دوم رشته‌ی bab نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن aabbab نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن aSb نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی کلمه‌ی aba نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی aabab نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن bSa نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی هیچ کلمه‌ای نوشته نشده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی ba نوشته شده است.)

در ابتدا تعداد زیادی کارت که بر روی آنها هیچ کلمه‌ای نوشته نشده است در اختیار ما قرار گرفته است.

الف) نشان دهید که با استفاده از این کارت‌ها و با این ماشین می‌توان کارتی را ایجاد کرد که بر روی آن کلمه‌ی abbaba نوشته شده باشد.

ب) ثابت کنید که با استفاده از این ماشین می‌توان هر کارتی که بر روی آن یک کلمه نوشته شده است را تولید کرد، اگر و فقط اگر این کلمه تنها از a و b تشکیل شده باشد و تعداد a های آن برابر با تعداد b های آن باشد. (**۱۰ نمره**)

۳- یک ساختمان چهار طبقه به شکل عجیبی ساخته شده است. طبقات با شماره‌های صفر (همکف) تا ۳ شماره‌گذاری شده‌اند. در هر طبقه ۸ اتاق با شماره‌های صفر تا ۷ (به ترتیب از چپ به راست) قرار دارند و در هر یک از اطاق‌های طبقات ۱ تا ۳، یک نفر قرار دارد. اتاق‌ها از طریق کانال‌های «مستقیم» و یا «کج» مطابق شکل زیر به اتاق‌های طبقه‌ی پایین راه دارند.(**۱۷ امتیاز**)



الف) فرض کنید که یک توپ در اتاق شماره‌ی i از طبقه‌ی سوم قرار دارد ($۰ \leq i \leq ۷$) . بر روی این توپ عدد j نوشته شده است ($۰ \leq j \leq ۷$). می‌خواهیم این توپ را از طریق کانال‌های موجود به اتاق شماره‌ی j از طبقه‌ی همکف بفرستیم. این کار توسط افرادی که در اتاق‌ها هستند بدین صورت انجام می‌شود که هر فرد با دریافت توپ و تنها براساس شماره‌ی اتاق و شماره‌ی طبقه‌ای که در آن قرار دارد و نیز عدد j که بر روی توپ نوشته شده است تصمیم می‌گیرد که توپ را از طریق یکی از کانال‌های مستقیم یا کج به اتاق طبقه‌ی پایین ارسال کند (توپ هیچ‌گاه به طبقه‌ی بالا نمی‌رود). مشخص کنید که این افراد براساس چه الگوریتمی می‌توانند این کار را انجام دهند. توجه کنید که لازم است کلیه‌ی افراد براساس یک الگوریتم واحد تصمیم بگیرند. احتیاج به نوشتن برنامه نیست ولی لازم است که اثبات کنید که الگوریتم شما درست عمل می‌کند.

ب) ثابت کنید که مسیر توپ در بند فوق برای هر i و j یکتاست.

ج) فرض کنید که n ($۱ < i \leq ۸$) عدد توپ در n اتاق از طبقه‌ی سوم قرار دارند و از سمت چپ به راست بر روی این توپ‌ها شماره‌های صفر تا $n-۱$ نوشته شده است. اثبات کنید که اگر افراد موجود در اتاق‌ها همگی براساس الگوریتم بند فوق عمل کنند، توپی که بر روی آن شماره‌ی i نوشته شده است در انتها به اتاق شماره‌ی i در طبقه‌ی همکف می‌رسد و در این مدت هیچ‌گاه بیش از یک توپ وارد یک اتاق نمی‌شود.

۴- یک ماشین حساب در اختیار داریم که دارای ٤ حافظه است که با شماره‌های ۱ تا ٤ مشخص می‌شوند. هر یک از این حافظه‌ها می‌تواند یک عدد صحیح مثبت را در خود نگهداری کند (محدودیتی در مقدار این عدد وجود ندارد). این ماشین حساب می‌تواند یک برنامه را اجرا کند. هر برنامه شامل تعدادی دستور است که به ترتیب مشخصی قرار گرفته‌اند. این ماشین حساب تنها سه نوع دستور را قبول می‌کند. این سه نوع دستور عبارتند از:

- I n (n یک عدد صحیح بین ۱ تا ٤ است.): این دستور به مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n یکی اضافه می‌کند. پس از اجرای این دستور، ماشین حساب دستور بعدی را اجرا می‌کند.

- D n (n یک عدد صحیح بین ۱ تا ٤ است.): اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مساوی صفر باشد، این دستور هیچ کاری انجام نمی‌دهد و پس از آن دستور بعدی اجرا می‌شود. ولی اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مثبت باشد، این دستور یکی از مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n کم می‌کند و سپس از دستور بعدی صرف نظر کرده و دستور بعد از آن را اجرا می‌کند.
- T d (d یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.): این دستور به تنهایی کاری انجام نمی‌دهد ولی مقدار d مشخص می‌کند که چه دستوری پس از این دستور اجرا شود. اگر d یک عدد منفی باشد، دستوری که $|d|$ تا قبل از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود. به همین صورت اگر d یک عدد مثبت باشد، دستوری که d تا بعد از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود.

اجرای یک برنامه از دستور اول آن شروع می‌شود و با توجه به شرایط فوق تا وقتی که دستوری که باید اجرا شود وجود داشته باشد، ادامه می‌یابد. برای مثال این برنامه را در نظر بگیرید:

```
D 2
T 2
T -2
D 1
T 3
I 2
T -3
```

این برنامه ابتدا حافظه‌ی شماره‌ی ۲ را پاک می‌کند و سپس مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ را در حافظه‌ی شماره‌ی ۲ ذخیره می‌کند و مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ را مساوی با صفر می‌کند. اجرای برنامه پس از اجرای دستور T 3 تمام می‌شود؛ چون دستوری که باید اجرا شود وجود ندارد.

الف) برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

```
D 1
T 6
D 1
T 3
I 2
T -5
I 3
D 2
T 5
I 1
D 2
T -11
T -3
```

اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ برابر با ۱۳۷٤ و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها برابر با صفر باشد، پس از اجرای این برنامه این مقادیر به چه صورت خواهند بود؟

ب) فرض کنید a_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند و مجموع ارقام آنها برابر با n است. برنامه‌ای برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار a_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار a_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ ذخیره شده باشد. تعداد دستورهای برنامه‌ی شما نباید از ۳۰ بیشتر باشد.

ج) فرض کنید b_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده‌اند و مجموع ارقام آنها برابر با n است و همچنین ارقام یکان و دهگان آنها هر دو همزمان یک نیستند. (برای مثال $b_۴ = ۵$ است چون تنها عددهای ۳۱ و ۲۲ و ۱۲۱ و ۱۱۲ و ۱۳ وجود دارند که دارای این شرایط هستند.) برنامه‌ای برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار b_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار b_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ ذخیره شده باشد.

توجه کنید که در قسمت‌های ۲ و ۳ باید در مورد ایده‌ی برنامه‌ای که می‌نویسید توضیح دهید. (**۲۰ نمره**)

۵- در یک مهمانی n نفر حضور دارند. به ازای یک عدد ثابت k، $(۱ \le k \le n-۱)$؛ هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمانان دست می‌دهد. می‌دانیم که لااقل $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$ نفر وجـــود دارند که دوبه‌دو بـــا هم دست داده‌اند. ثابـت کنید که در این مهمانی هر دو نفر با هم دست داده‌اند. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است.) (**۱۰ نمره**)

۶- یک سفینه‌ی فضایی می‌خواهد پیامهایی را به زمین ارسال کند. دستگاه فرستنده‌ی این سفینه قادر است در هر مرحله یک «کلمه» به زمین بفرستد. هر کلمه یک دنباله به طول n از صفر و یک است. بنابراین با استفاده از این فرستنده می‌توان هر پیغام را به صورت دنباله‌ای از کلمه‌ها به زمین ارسال کرد. به دلیل طولانی بودن مسیری که پیام باید طی کند تا به زمین برسد، در بین راه ممکن است در هر کلمه حداکثر یکی از صفرها تبدیل به یک و یا حداکثر یکی از یک‌ها تبدیل به صفر شود. هدف ما در این مسأله این است که برای فرستادن پیام‌ها تنها از بعضی کلمات خاص استفاده کنیم، به طوری که پس از رسیدن پیام به زمین خطاها قابل تشخیص و رفع کردن باشند. برای مثال اگر $n = ۶$ باشد، می‌توانیم از ٤ کلمه‌ی 000000، 111000، 000111، و 111111 استفاده کنیم. در این صورت اگر برای مثال کلمه‌ی 110111 به زمین برسد، می‌توانیم تشخیص دهیم که کلمه‌ی درست 111111، و نه کلمه‌ای دیگر از کلمات فوق، بوده است که در اثر خطا به 110111 تبدیل شده است. (**۱۵ نمره**)

الف) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این که عمل تشخیص و رفع کردن خطا ممکن باشد این است که هر دو کلمه‌ای که از آنها استفاده می‌کنیم لااقل در سه محل با هم اختلاف داشته باشند.

ب) ثابت کنید که اگر $n = ۲۰$ باشد، برای این که خطاها قابل تشخیص و رفع باشند، نمی‌توانیم بیشتر از ۵۰۰۰۰ کلمه در دستگاه داشته باشیم.

۷- یک اداره از n بخش تشکیل شده است که هر بخش دارای یک نفر با عنوان مدیر بخش است. مدیر هر یک از این بخش‌ها n نفر کارمند را تحت نظر دارد. هر یک از این افراد تنها در یکی از این بخش‌ها کار می‌کنند. (بنابراین هر یک از کارمندان تنها تحت نظر یک مدیر است.)

می‌خواهیم برای هر یک از افرادی که در این اداره کار می‌کنند (یعنی مدیران بخش‌ها و کارمندان) یک دفتر کار اختصاص دهیم به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- هر یک از این افراد یک دفتر داشته باشد. البته هر یک از دفترها می‌تواند هر تعداد از این افراد را در خود جای دهد.
- هیچ دو مدیری نباید با هم در یک دفتر قرار بگیرند.
- دفتر مدیر هیچ یک از بخش‌ها نباید با دفتر هیچ یک از کارمندان همان بخش یکی باشد.
- هر یک از مدیران باید با یک خط تلفن اختصاصی با هر یک از کارمندان زیر نظرش در ارتباط باشد. منظور از یک خط تلفن اختصاصی بین مدیر a و کارمند b، خط تلفنی است که بین دفتر کار این دو کشیده شده است و از طریق آن تنها این دو نفر می‌توانند با هم صحبت کنند و هیچ‌کدام از سایر کارمندان و مدیران نباید از این خط استفاده کنند.
- بین هر دو دفتر کار حداکثر یک خط تلفن می‌توان کشید.

ثابت کنید که حداقل تعداد دفترهای لازم برای جا دادن این افراد به طوری که شرایط فوق برقرار شوند برابر است با $\left\lfloor \frac{۳n}{۲} \right\rfloor + ۱$.

(منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است.) (**۱۵ نمره**)

۸- در جمعی n نفر حضور دارند. بعضی از این افراد همدیگر را می‌شناسند. فرض کنید که آشنایی یک رابطه‌ی دو طرفه است؛ یعنی اگر a، b را بشناسد، b نیز a را می‌شناسد. فرض کنید که هر نفر در این جمع حداکثر با d نفر دیگر آشناست.

اگر $d = k + l + ۱$ باشد، می‌خواهیم این افراد را به دو گروه A و B تقسیم کنیم به طوری که هر یک از اعضای گروه A حداکثر k نفر از دیگر اعضای این گروه را بشناسد و هر یک از اعضای گروه B هم با حداکثر ۱ نفر از دیگر اعضای این گروه آشنا باشد.

برای این منظور الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

ابتدا یک گروه‌بندی دلخواه (A,B) را در نظر می‌گیریم. سپس در هر مرحله این کار را انجام می‌دهیم: اگر گروه‌بندی (A,B) دارای شرایط مسأله بود، کار تمام شده است. در غیر این صورت یا یک نفر در A وجود دارد که با بیش از k نفر از اعضای گروهش آشنا باشد و یا یک نفر در گروه B وجود دارد که با بیش از ۱ نفر از اعضای گروهش آشنا باشد. در هر یک از این دو حالت فرد مزبور را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم.

ثابت کنید که این الگوریتم همواره به جواب می‌رسد. (**۱۵ نمره**)